

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дискретные структуры
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Дифференцированный зачет

4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 4

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: А.Б. Дайняк, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Курс является вводным курсом дискретной математики. Включает темы, стандартно необходимые студентам-математикам и информатикам: комбинаторика (включая скорости роста комбинаторных величин), графы, элементы теории чисел. Положительной особенностью курса является включение тем, показывающих, как в дискретной математике применяется линейная алгебра и теория вероятностей. Тем самым, курс способствует целостному восприятию студентами нескольких стандартных дисциплин, изучаемых в первые два года обучения.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

изучение математических основ современной комбинаторики, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области комбинаторных задач прикладной математики, физики и информационных технологий.

#### Задачи дисциплины

изучение математических основ современной комбинаторики;  
приобретение слушателями теоретических знаний в области комбинаторного анализа задач, возникающих на практике;  
освоение аналитического и алгебраического аппарата дискретной математики и получение навыков работы с основными дискретными структурами;  
освоение навыков качественного оформления текстов научных трудов с использованием средств LaTeX.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

основы комбинаторики и асимптотического комбинаторного анализа;  
 основы теории производящих функций и приложения теории к перечислительным задачам комбинаторики;  
 основы теории графов: планарность, изоморфизм, эйлеровость, гамильтоновость, хроматическое число, деревья, мультиграфы, орграфы, турниры, допустимые последовательности степеней вершин, количество связных графов с данным числом вершин и ребер (формула Кэли для числа деревьев и ее обобщения);  
 основы теории гиперграфов: теоремы Эрдеша – Ко – Радó и Франкла – Уилсона, графы пересечений и реберные графы;  
 основные вероятностные методы в комбинаторике: линейность математического ожидания, метод альтернирования, локальная лемма Ловаса, применение неравенства Йенсена для оценки математического ожидания;  
 основные линейно-алгебраические методы в комбинаторике: линейная независимость полиномов над конечным полем;  
 основы теории Рамсея: числа Рамсея для графов, конструктивные оценки;  
 основы теории систем представителей для графов и гиперграфов, в том числе теорема Холла, понятие перманента матрицы, его свойства и связь с системами различных представителей;  
 основы экстремальной комбинаторики: теорема Турана и ее уточнения для дистанционных графов, числа Заранкевича;  
 основы теории групп и полей: простейшие свойства групп, подгрупп, смежных классов и классов сопряженности; группы перестановок; конечные поля;  
 основы теории чисел: сравнения по модулю, китайская теорема об остатках, теоремы о существовании и поиске первообразных корней, теоремы Ферма (малая), Эйлера и Вильсона.

уметь:

вычислять количества различных комбинаторных объектов: сочетаний, размещений, перестановок, циклических последовательностей;  
 доказывать комбинаторные тождества;  
 вычислять приближенные значения (асимптотики) комбинаторных выражений;  
 составлять и решать рекуррентные соотношения;  
 доказывать различные свойства графов и гиперграфов;  
 решать экстремальные задачи комбинаторики;  
 строить системы представителей для графов и гиперграфов;  
 решать рамсеевские задачи;  
 оценивать хроматические числа графов;  
 доказывать различные свойства групп и подгрупп и использовать их в других разделах математики;  
 решать линейные и простейшие экспоненциальные сравнения по различным модулям, системы сравнений по различным модулям;  
 строить конечные поля и исследовать различные свойства их элементов.

владеть:

навыками самостоятельной работы;  
 навыками освоения большого объема информации;  
 культурой постановки и моделирования комбинаторных задач;  
 вероятностным методом в комбинаторике;  
 линейно-алгебраическим методом в комбинаторике;  
 методом производящих функций;  
 навыками оформления больших научных текстов;  
 навыками работы в LaTeX.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост.

		лекции	семинары	лаборат. работы	работа
1	Алгебраические структуры: группы. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Классы сопряженных элементов, орбитно-стабилизаторное свойство группы. Группы перестановок. Теоремы Коши—Фробениуса и Редфилда—Пойи.	6	6		
2	Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения, принцип Дирихле, формула включений и исключений, метод потенциалов, задачи на сочетания, размещения, перестановки.	6	6		
3	Определение графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа и т.д. Изоморфизм графов. Число независимости, кликовое число, понятия связности и двусвязности, их свойства на различных графах. Деревья и коды Прюфера	6	6		
4	Планарные графы, раскраски графов, эйлеровы и гамильтоновы графы	6	6		
5	Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Асимптотические эквивалентность и неравенства. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга	6	6		30
6	Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.. Степенные ряды и производящие функции. Примеры тождеств, доказываемых с помощью степенных рядов.	6	6		
7	Теория Рамсея для графов. Вероятностный метод. Локальная лемма Ловаса. Экстремальная теория графов: теорема Турана и числа Заранкевича.	6	6		
8	Алгебраические структуры: поля и кольца. Конечные поля. Неприводимые многочлены. Количество корней многочлена над произвольным полем.	6	6		
9	Понятие гиперграфа. Аналоги графовых терминов для гиперграфов. Трансверсали (системы различных представителей). Теорема Холла. Перманент. Системы общих представителей (с.о.п., трансверсальные множества). Жадный алгоритм поиска с.о.п. и оценки мощности жадного покрытия	6	6		30
10	Линейно-алгебраический метод в комбинаторике.	6	6		
Итого часов		60	60		60

Подготовка к экзамену	0 час.
Общая трудоёмкость	180 час., 4 зач.ед.

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 3 (Осенний)

1. Алгебраические структуры: группы. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Классы сопряженных элементов, орбитно-стабилизаторное свойство группы. Группы перестановок. Теоремы Коши—Фробениуса и Редфилда—Пойи.

Аксиоматика групп и простейшие примеры. Аддитивная и мультипликативная группы вычетов. Теорема Кэли об универсальности групп подстановок. Понятия действия группы на множестве и орбиты элемента. Примеры. Теорема Коши—Фробениуса, лемма Бёрнсайда, теорема Редфилда—Пойи

2. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения, принцип Дирихле, формула включений и исключений, метод потенциалов, задачи на сочетания, размещения, перестановки.

Бином Ньютона, полиномиальная формула. Свойства биномиальных коэффициентов.

3. Определение графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа и т.д. Изоморфизм графов. Число независимости, кликовое число, понятия связности и двусвязности, их свойства на различных графах. Деревья и коды Прюфера

Маршруты, расстояния в графах. Двойной подсчёт, теорема «о рукопожатиях». Теорема «о блочной структуре графа». Теорема Кэли о числе деревьев и ее обобщения.

4. Планарные графы, раскраски графов, эйлеровы и гамильтоновы графы

Миноры и гомеоморфные графы. Критерии Вагнера и Понтрягина—Куратовского (б/д). Формула Эйлера для связных планарных графов и ее обобщение на произвольные планарные графы. Простейшие оценки хроматического числа и хроматического индекса. Теорема о пяти красках. Достаточное условие Ore существования гамильтонова цикла. Критерий существования эйлерова цикла. Алгоритм Флёрри. Построение последовательностей Де Брёйна на основе эйлеровых циклов.

5. Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Асимптотические эквивалентность и неравенства. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга

Рекуррентные формулы. Число упорядоченных разбиений. Диаграммы Юнга. Теоремы Эйлера о равенстве количеств неупорядоченных разбиений. Асимптотические эквивалентность и неравенства, «О» большое и «о» малое. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга и ее применение для исследования асимптотического поведения биномиальных и полиномиальных коэффициентов

##### Семестр: 4 (Весенний)

6. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.. Степенные ряды и производящие функции. Примеры тождеств, доказываемых с помощью степенных рядов.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Общий вид решения: случай различных корней характеристического многочлена — с доказательством, общий случай — только формулировка. Пример применения: подсчёт количества слов с запретами, числа Фибоначчи. Производящие функции последовательностей, удовлетворяющих линейным рекуррентным соотношениям. Числа Каталана. Нахождение сумм с участием биномиальных коэффициентов, чисел Фибоначчи и т.д. Применение производящих функций для доказательства комбинаторных тождеств, в т.ч. при сравнении количеств разбиений числа на слагаемые.

7. Теория Рамсея для графов. Вероятностный метод. Локальная лемма Ловаса. Экстремальная теория графов: теорема Турана и числа Заранкевича.

Теория Рамсея. Числа Рамсея: верхняя оценка Эрдёша—Секереша, её следствие для диагональных чисел Рамсея; нижняя оценка диагональных чисел с помощью простого вероятностного метода. Вероятностный метод, в т.ч. с использованием неравенства Йенсена. Локальная лемма Ловаса. Применение к нижней оценке диагональных чисел Рамсея и к нижней оценке чисел Ван дер Вардена. Теорема Турана о графе с заданным кликовым числом и максимальным количеством рёбер. Аналог задачи Турана для двудольных графов: проблема Заранкевича. Решение проблемы Заранкевича в частном случае для графов без 4-циклов. Вероятностная нижняя оценка чисел Заранкевича.

8. Алгебраические структуры: поля и кольца. Конечные поля. Неприводимые многочлены. Количество корней многочлена над произвольным полем.

Построение конечного поля заданного порядка. Теория чисел: сравнения по модулю, решения линейных сравнений. Китайская теорема об остатках. Дискретное логарифмирование. Малая теорема Ферма, теорема Эйлера и теорема Вильсона. Поле вычетов по простому модулю. Теоремы о существовании и нахождении первообразных корней по натуральному модулю. Теоремы о количестве элементов заданного порядка и о существовании примитивных элементов в конечном поле.

9. Понятие гиперграфа. Аналоги графовых терминов для гиперграфов. Трансверсали (системы различных представителей). Теорема Холла. Перманент. Системы общих представителей (с.о.п., трансверсальные множества). Жадный алгоритм поиска с.о.п. и оценки мощности жадного покрытия

Теорема Холла о паросочетаниях в двудольных графах. Следствие о хроматическом индексе двудольных графов. Свойства перманента матрицы и его связь с трансверсалиями.  $t$ -пересекающиеся гиперграфы. Теорема Эрдёша—Ко—Радо

10. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике.

Теорема Грехэма—Поллака. Теорема Фишера. Теорема Франкла—Уилсона, конструктивная нижняя оценка чисел Рамсея.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория. Вычислительное устройство с доступом в Интернет (компьютер, ноутбук, планшет и т.д.) для самостоятельной работы.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Вероятностный метод [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. Алон, Дж. Спенсер ; пер. 2-го англ. изд. под ред. А. А. Сапоженко. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2007, 2013. — 320 с.
2. Экстремальные задачи теории графов и анализ данных [Текст] / А. М. Райгородский - М. Регулярная и хаотическая динамика, 2008

3. Задачи и упражнения по дискретной математике [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко .— 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2009 .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

#### Дополнительная литература

1. Вероятность и алгебра в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2010 .— 48 с.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru>

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple, WolframAlpha и др.

Для выполнения заданий используется онлайн-платформа Overleaf для работы со средствами LaTeX

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций и семинаров.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 3 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.Б. Дайняк, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент



## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретные структуры» обучающийся должен:

### знать:

основы комбинаторики и асимптотического комбинаторного анализа;  
основы теории производящих функций и приложения теории к перечислительным задачам комбинаторики;  
основы теории графов: планарность, изоморфизм, эйлеровость, гамильтоновость, хроматическое число, деревья, мультиграфы, орграфы, турниры, допустимые последовательности степеней вершин, количество связных графов с данным числом вершин и ребер (формула Кэли для числа деревьев и ее обобщения);  
основы теории гиперграфов: теоремы Эрдеша – Ко – Радó и Франкла – Уилсона, графы пересечений и реберные графы;  
основные вероятностные методы в комбинаторике: линейность математического ожидания, метод альтернирования, локальная лемма Ловаса, применение неравенства Йенсена для оценки математического ожидания;  
основные линейно-алгебраические методы в комбинаторике: линейная независимость полиномов над конечным полем;  
основы теории Рамсея: числа Рамсея для графов, конструктивные оценки;  
основы теории систем представителей для графов и гиперграфов, в том числе теорема Холла, понятие перманента матрицы, его свойства и связь с системами различных представителей;  
основы экстремальной комбинаторики: теорема Турана и ее уточнения для дистанционных графов, числа Заранкевича;  
основы теории групп и полей: простейшие свойства групп, подгрупп, смежных классов и классов сопряженности; группы перестановок; конечные поля;  
основы теории чисел: сравнения по модулю, китайская теорема об остатках, теоремы о существовании и поиске первообразных корней, теоремы Ферма (малая), Эйлера и Вильсона.

### уметь:

вычислять количества различных комбинаторных объектов: сочетаний, размещений, перестановок, циклических последовательностей;  
 доказывать комбинаторные тождества;  
 вычислять приближенные значения (асимптотики) комбинаторных выражений;  
 составлять и решать рекуррентные соотношения;  
 доказывать различные свойства графов и гиперграфов;  
 решать экстремальные задачи комбинаторики;  
 строить системы представителей для графов и гиперграфов;  
 решать рамсеевские задачи;  
 оценивать хроматические числа графов;  
 доказывать различные свойства групп и подгрупп и использовать их в других разделах математики;  
 решать линейные и простейшие экспоненциальные сравнения по различным модулям, системы сравнений по различным модулям;  
 строить конечные поля и исследовать различные свойства их элементов.

#### владеть:

навыками самостоятельной работы;  
 навыками освоения большого объема информации;  
 культурой постановки и моделирования комбинаторных задач;  
 вероятностным методом в комбинаторике;  
 линейно-алгебраическим методом в комбинаторике;  
 методом производящих функций;  
 навыками оформления больших научных текстов;  
 навыками работы в LaTeX.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль

[Вопросы ниже записаны в LaTeX-нотации.]

Что такое полиномиальный коэффициент?

Сколько  $3^n$ -сочетаний с повторениями можно выбрать из десятиэлементного множества?

Расположите в порядке возрастания числа  $A_7^2, A_7^2, C_7^2, C_7^2$ .

Во множестве  $A$  пять элементов, а во множестве  $B$  семь элементов. Чему равно  $|A \cap B|$ , если  $|A \cup B| = 25$ ?

Пусть  $A$  — множество всех чётных чисел, не больших ста. Найдите  $\sum_{k=1}^n \binom{A}{k}$ ?

Пусть объект  $x$  принадлежит ровно пяти из множеств  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ . Чему равно произведение  $\prod_{k=1}^n \binom{A}{k}(x)$ ?

Вспомнив свойства симметричности и унимодальности биномиальных коэффициентов, а также определения комбинаторных чисел, расставьте в порядке возрастания числа:  $\binom{1000}{450}$ ,  $\binom{1000}{670}$ ,  $A_{1000}^{450}$ ,  $C_{1000}^{450}$ .

Сформулируйте транснеравенство. Как можно его доказать, используя метод потенциалов?

Можно ли придумать пример натурального  $n$ , для которого не существует кратного ему числа вида  $333 \dots 300 \dots 00$ ?

Сколько рёбер в графе  $K_n$ ? Какой эксцентриситет вершин у этого графа? Какой у него диаметр? Какое у него кликовое число и число независимости?

Какими альтернативными способами можно определить класс деревьев, кроме «связные графы без циклов»?

Сколько рёбер в дереве на  $2013$  вершинах?

Может ли в дереве на  $2013$  вершинах найтись независимое множество на  $2012$  вершинах?

Может ли полный двудольный граф быть деревом?

Чему равны хроматическое число и хроматический индекс цепи на  $11$  вершинах? Тот же вопрос для цикла на  $11$  вершинах. Чему равно хроматическое число произвольного дерева?

В графе, у которого степень всех вершин не превосходит  $3$ , есть цикл длины  $2013$ . Чему равен хроматический индекс этого графа?

Чему равно количество различных деревьев на множестве вершин  $\{1, 2, \dots, 7\}$  со степенной последовательностью  $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$ ?

В графе на  $150$  вершинах нет независимых множеств размера  $11$ . Почему можно утверждать, что такой граф нельзя правильно раскрасить менее чем пятнадцатью цветами?

Приведите пример укладки планарного графа, для которой  $\text{не справедлива}$  формула Эйлера.

Бывают ли графы, которые можно уложить на плоскости, но нельзя на сфере?

Можно ли уложить на плоскости граф со  $100$  вершинами и  $300$  рёбрами?

Приведите пример планарного графа, хроматическое число которого равно  $4$ . Верно ли, что у любого планарного графа хроматическое число не больше четырёх?

Наличие вершин какой степени можно гарантировать в планарном графе?

Сформулируйте теорему Холла.

Где в доказательстве корректности алгоритма Флёрри используется лемма об отсутствии мостов в связанных графах с чётными степенями вершин?

Приведите пример графа, в котором есть гамильтонов цикл, но который не удовлетворяет условиям Оре.

Обязательно ли в  $50$ -регулярном графе на  $100$  вершинах есть гамильтонов цикл?

Сколько вершин в графе Де Брёйна, по которому строится универсальная последовательность Де Брёйна порядка  $2013$ ?

Как устроен граф на  $10$  вершинах с максимальным числом рёбер, в котором нет клика размера  $4$ ?

В графе на  $10$  вершинах нет клика размера  $5$ . Какое максимальное число рёбер может быть у такого графа?

Как можно из теоремы Турана получить оценку  $\text{минимального}$  числа рёбер в графе без  $\text{независимых множеств}$  заданного размера?

Что такое правильная раскраска гиперграфа?

Что такое вершинное покрытие гиперграфа, как ещё оно называется? Что такое глубина матрицы?

Приведите верхнюю оценку мощности «жадного» покрытия матрицы (с нижним ограничением на число единиц в столбце). Переформулируйте эту теорему в терминах покрытий гиперграфов.

На лекции строится матрица, на которой жадный алгоритм работает «очень неоптимально». Сколько всего единиц в этой матрице (при каждом  $a$ )?

Что такое перманент?

Различные или одинаковые циклические слова соответствуют словам  $aaabba$  и  $baaab$ ?

Как вычислить количество неупорядоченных разбиений числа  $50$ ?

Сколько упорядоченных разбиений числа  $5$ ?

Постройте диаграмму разбиения  $13=5+3+2+2+1$ . Постройте диаграмму, двойственную к предыдущей. Какому разбиению она соответствует?

Пусть  $p_{\text{различн}}(N)$  обозначает количество неупорядоченных разбиений числа  $N$  на различные слагаемые. Почему из теоремы Эйлера о разбиениях следует, что  $p_{\text{различн}}(1001)$  чётно?

Какие автоморфизмы есть у графа  $K_n$ , у цепи на  $n$  вершинах, у графа  $K_{n,n}$ ?

Образует ли группу относительно сложения множество всех нечётных чисел? А множество чётных чисел?

Этот вопрос использует мультипликативные обозначения. Пусть  $G$  — группа, и  $a, b \in G$ . Убедитесь, что  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

Чему равна композиция перестановок  $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3$  и  $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 2$ ? Запишите перестановки, обратные к данным.

Сколько элементов в группах  $\mathbb{Z}_{12}$  и  $\mathbb{Z}_{12}^{\times}$ ?

Что такое порядок элемента?

Что такое циклическая группа?

Найдите  $\phi(15)$ .

Почему остаток от деления  $5^{16}$  на  $17$  равен единице?

Придумайте какую-нибудь группу порядка  $120$ . Почему у этой группы не может быть подгрупп порядка  $7$ ?

Опишите смежный класс элемента  $2012$  в группе  $(\mathbb{Z}, +)$  по подгруппе  $2\mathbb{Z}$ . Через  $2\mathbb{Z}$  обозначена подгруппа всех чётных чисел.

Что такое поле?

Чему равен остаток от деления многочлена  $x^4+7x+1$  на многочлен  $x^2+5$ ? Многочлены рассматриваются как элементы множества  $\mathbb{Z}_9[x]$ .

Что такое неприводимый многочлен? Почему многочлен  $x^{28}+28$  не является неприводимым над  $\mathbb{Z}_{29}$ ?

Что такое нормированный многочлен? Сколько нормированных многочленов степени 4, неприводимых над  $\mathbb{Z}_7$ ?

Пользуясь малой теоремой Ферма, найдите обратный по умножению элемент к 5 в поле  $\mathbb{Z}_{11}$ .

Найдите количество циклов в перестановках  $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3$  и  $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 2$ .

С помощью теоремы Редфилда—Пойи найдите количество неэквивалентных раскрасок вершин квадрата в красный, синий и зелёный цвета. Раскраски считаются эквивалентными, если существует поворот трёхмерного пространства, совмещающий их.

Какой характеристический многочлен у рекуррентного соотношения  $a_{n+2}-a_{n+3}+4a_{n-1}=0$ ?

Какая производящая функция у последовательности  $1, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots$ ? Чему равен радиус сходимости соответствующего ряда?

Выпишите четыре первых члена ряда для  $(1+x)^{1/3}$  пользуясь обобщённой формулой бинома Ньютона.

Чему равен четвёртый член в последовательности чисел Каталана?

Сформулируйте теорему Эрдёша—Ко—Радó.

Сформулируйте теорему Фишера. Каким методом эта теорема доказывается?

Что такое числа Рамсея? Чему равно  $R(s, 2)$ ?

Чему равна вероятность того, что в случайном графе на  $n$  вершинах, в котором каждое ребро проводится с вероятностью  $\frac{1}{2}$ , появится клика на фиксированном подмножестве из  $k$  вершин?

Как асимптотически соотносятся между собой нижние оценки диагональных чисел Рамсея, полученные вероятностным (неконструктивным) и алгебраическим (конструктивным) подходами? Равны по порядку? Логарифмы равны по порядку?

Что такое  $Z_{a,b}(m, n)$ ?

Выпишите верхнюю оценку  $Z_2(m)$ .

Как соотносятся нижние оценки чисел  $Z_2(m)$ , полученные вероятностным (неконструктивным) и алгебраическим (конструктивным) подходами?

Сколько единиц в матрице, которая была с помощью алгебраической конструкции построена на лекции для доказательства нижней оценки чисел Заранкевича? Каких размеров эта матрица?

Пусть событие  $A$  не зависит от группы событий  $B_1, \dots, B_5$ . Всегда ли из этого следует, что  $\Pr[A \mid (B_1 \cup B_4) \cap \{B_3\}] = \Pr[A]$ ? Всегда ли из этого следует, что  $\Pr[B_1 \mid A \cap B_2] = \Pr[B_1]$ ?

Сформулируйте лемму Ловаса в общем и симметричном случае.

Оценку какого порядка даёт лемма Ловаса для чисел Рамсея  $R(s, 3)$ ?

Напишите какую-нибудь нижнюю оценку на числа Ван дер Вардена, получающуюся из локальной леммы Ловаса.

Пусть есть три вида событий:  $A_1, \dots, A_m$ ,  $B_1, \dots, B_m$  и  $C_1, \dots, C_m$ . Пусть на каждое событие вида  $A$  могут влиять не больше  $n_{AB}$  событий вида  $B$  и не более  $n_{AC}$  событий вида  $C$ . Аналогично введём величины  $n_{BA}, n_{BC}, n_{CA}, n_{CB}$ . Убедитесь, что для выполнения неравенства  $\Pr[\bigcap_i (\{A_i\} \cap \{B_i\} \cap \{C_i\})] > 0$  достаточно, чтобы нашлись числа  $a, b, c \in (0, 1)$ , такие, что  $\Pr[A_i] \leq a(1-b)^{n_{AB}}(1-c)^{n_{AC}}$ ,  $\Pr[B_i] \leq b(1-a)^{n_{BA}}(1-c)^{n_{BC}}$  и  $\Pr[C_i] \leq c(1-a)^{n_{CA}}(1-b)^{n_{CB}}$ . Заметьте, что это частный случай леммы Ловаса.

Что такое число скрещиваний? Сформулируйте «тривиальную» (линейную по числу рёбер) и «нетривиальную» (доказанную с помощью вероятностного метода) нижнюю оценку на число скрещиваний.

Почему можно считать, что в укладке с минимальным числом скрещиваний каждая пара рёбер пересекается лишь в одной точке?

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

## Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачета 3 семестра:

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения, принцип Дирихле, метод потенциалов, формула включений и исключений.
2. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Оценки для  $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$  с помощью тождества. Асимптотическая эквивалентность и неравенства, «О» большое и «о» малое. Формула Стирлинга (б/д). Запись  $(c+o(1))^n$ . Оценки биномиальных коэффициентов вида  $C_n^{\lfloor an \rfloor}$ , а  $\ln(0,1)$ . Аналогичные результаты для полиномиальных коэффициентов. Асимптотика для  $C_n^k$  при  $k^2 = o(n)$ . Оценки той же величины при больших  $k$ . Асимптотики для  $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} / C_n^{\lfloor n/2 - x \rfloor}$ .
3. Определение графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа и т.д. Эквивалентные определения дерева (4 штуки). Формула Кэли. Унициклические графы. Точная формула для числа различных унициклических графов (надо уметь доказывать лемму о количестве лесов) и асимптотика. Количество деревьев на фиксированном множестве вершин, разбивающихся на заданное множество поддеревьев на этих вершинах.
4. Маршруты в графах (цепи, циклы). Компоненты связности и блочная структура графов. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости орграфа. Последовательности и графы де Брёйна.
5. Независимые множества и клики. Число независимости и кликовое число. Связь между ними. Теорема Турана о числе ребер в графе с данным числом вершин и числом независимости. Следствие с асимптотической оценкой в случае последовательности графов. Дистанционные графы. Оценка числа ребер у дистанционного графа на плоскости.
6. Определение планарности графа. Изображение на сфере. Определение грани. Формула Эйлера. Оценки числа ребер, вытекающие из формулы Эйлера. Непланарность графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  как следствие из оценок. Теорема Понтрягина-Куратовского (б/д).
7. Гамильтоновы циклы и цепи. Достаточное условие гамильтоновости графа. Простейшие необходимые условия. Максимальное количество непересекающихся по ребрам гамильтоновых цепей и циклов в полных графах.
8. Хроматическое число и индекс графа. Связь с числом независимости, кликовым числом. Критерий двудольности графа. Теорема о пяти красках. Жадная покраска вершин. Теорема Визинга о хроматическом индексе (б/д).
9. Гамильтоновы цепи в турнирах: нижняя оценка с д-вом, верхняя – б/д. Достаточные условия существования гамильтоновой цепи и гамильтонова цикла в турнире.
10. Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Диаграммы Юнга. Соответствия между количествами разбиений при различных ограничениях на число, величину и вид слагаемых.
11. Алгебраические структуры: группы, кольца, поля. Аксиоматика. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа. Аддитивная и мультипликативная группы вычетов.
12. Классы сопряженных элементов, орбитно-стабилизаторное свойство группы. Группы перестановок. Теорема Кэли об универсальности групп подстановок. Понятия действия группы на множестве и орбиты элемента. Примеры. Теорема Коши—Фробениуса, лемма Бёрнсайда, теорема Редфилда—Пойи.

## Перечень вопросов для сдачи экзамена 4 семестра:

1. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами и их решение. Степенные ряды и производящие функции. Примеры тождеств, доказываемых с помощью степенных рядов. Вычисление значения ряда. Числа Каталана и числа Фибоначчи.
2. Теория Рамсея. Числа Рамсея  $R(s,t)$ : точные значения для  $s=1,2$ ; верхняя оценка Эрдёша—Секереша, её следствие для диагональных чисел Рамсея; нижняя оценка диагональных чисел с помощью простого вероятностного метода.
3. Локальная лемма Ловаса (общая и симметричная формулировка). Применение к нижней оценке диагональных чисел Рамсея и к нижней оценке чисел Ван дер Вардена.
4. Теорема Турана о графе с заданным кликовым числом и максимальным количеством ребер. Применение теоремы Турана к дистанционным графам.

5. Аналог задачи Турана для двудольных графов: проблема Заранкевича. Решение проблемы Заранкевича в частном случае для графов без 4-циклов. Вероятностная нижняя оценка чисел Заранкевича. Использование неравенства Йенсена для получения верхней оценки на произвольные числа Заранкевича.
6. Теория чисел: сравнения по модулю, решения линейных сравнений. Китайская теорема об остатках. Малая теорема Ферма, теорема Эйлера, теорема Вильсона. Дискретное логарифмирование.
7. Алгебраические структуры: поля и кольца. Конечные поля. Поле вычетов по простому модулю. Теоремы о существовании и нахождении первообразных корней по натуральному модулю. Теоремы о количестве элементов заданного порядка и о существовании примитивных элементов в конечном поле.
8. Конечные поля. Работа с многочленами. Неприводимые многочлены. Теорема Лагранжа о количестве корней многочлена над произвольным полем (основная теорема алгебры). Единственность конечного поля заданного порядка с точностью до изоморфизма (б/д). Построение конечного поля заданного порядка.
9. Понятие гиперграфа. Аналоги графовых терминов для гиперграфов. Трансверсали (системы различных представителей). Теорема Холла. Перманент и его свойства. Системы общих представителей (с.о.п., трансверсальные множества). Жадный алгоритм поиска с.о.п. и оценки мощности жадного покрытия.
10.  $t$ -пересекающиеся гиперграфы. Теорема Эрдёша—Ко—Радо.
11. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. Теорема Грехэма—Поллака. Теорема Фишера. Теорема Франкла—Уилсона, конструктивная нижняя оценка чисел Рамсея.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Локальная лемма Ловаса (общая и симметричная формулировка). Применение к нижней оценке диагональных чисел Рамсея и к нижней оценке чисел Ван дер Вардена.

Билет №2

1. Теорема Турана о графе с заданным кликовым числом и максимальным количеством рёбер. Применение теоремы Турана к дистанционным графам.

Билет №3

1. Аналог задачи Турана для двудольных графов: проблема Заранкевича. Решение проблемы Заранкевича в частном случае для графов без 4-циклов. Вероятностная нижняя оценка чисел Заранкевича. Использование неравенства Йенсена для получения верхней оценки на произвольные числа Заранкевича.

Задания:

1. Определение графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа и т.д. Понятие гиперграфа. Изоморфизм графов. Число независимости, кликовое число, хроматическое число и соотношения между ними. Компоненты связности, блоки. Центральные вершины.
2. Трансверсали (системы различных представителей). Теорема Холла. Перманент. Системы общих представителей. Жадный алгоритм покрытия.
3. Поиск первообразных корней по заданному модулю и построение конечных полей с помощью неприводимых многочленов.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;

- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.